Marchés financiers

Séance 5 : Les calculs sur emprunts

Christophe CHOUARD

Les calculs sur emprunts

Sommaire :

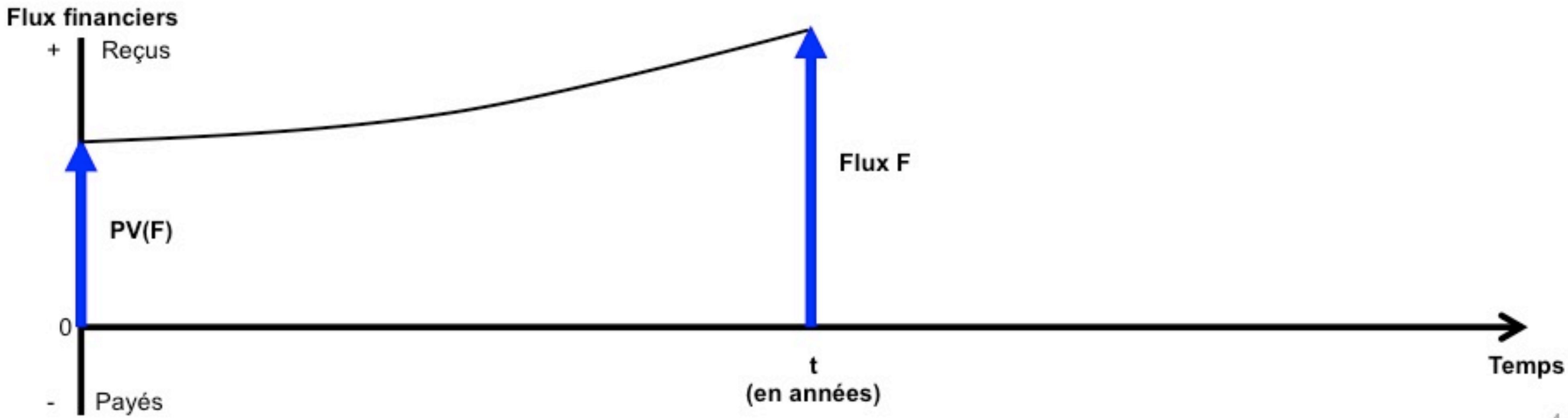
- La notion de valeur présente et du taux d'actualisation
- Notion de taux annualisé
- TRI : Taux de Rendement Interne
- Valeur présente d'une série de coupons
- Valeur présente d'une série de dividendes croissants
- Taux « zéro coupon »
- Calcul d'une courbe des taux « zéro coupon » à partir d'une courbe des taux « coupons »
- Calcul d'un taux à terme
- Variations du prix d'une obligation en fonction des taux d'intérêts

Valeur présente et taux d'actualisation

Valeur présente d'un flux financier F payé dans t années

$$PV(F) = F \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = F \cdot \rho^t \quad \text{avec } \rho = \frac{1}{(1+i)}$$

- F = Flux financier, positif ou négatif
- t = temps exprimé en années (nombre non nécessairement entier)
- i = taux d'intérêt annuel d'actualisation
- ρ = coefficient d'actualisation



Taux semestriel, taux annuel, taux annualisé

En Angleterre (£) et aux USA ($), les intérêts des obligations sont payés une fois par semestre.

Les taux sont néanmoins exprimés sur une base annuelle :

- i_s (exprimé en p.a.) signifie $\frac{i_s}{2}$ payé tous les semestres
- 7% p.a. semestriel signifie 3,5% payé tous les semestres

Pour « annualiser » un taux semestriel i_s p.a., c'est-à-dire pour le convertir en un taux annuel i_a p.a. :

$$\left(1+\frac{i_s}{2}\right)^{2\cdot t} = (1+i_a)^t \qquad \Rightarrow \qquad i_a = \left(1+\frac{i_s}{2}\right)^2 - 1$$

Exemple : 7% p.a. semestriels = 7,1225% p.a. annuels

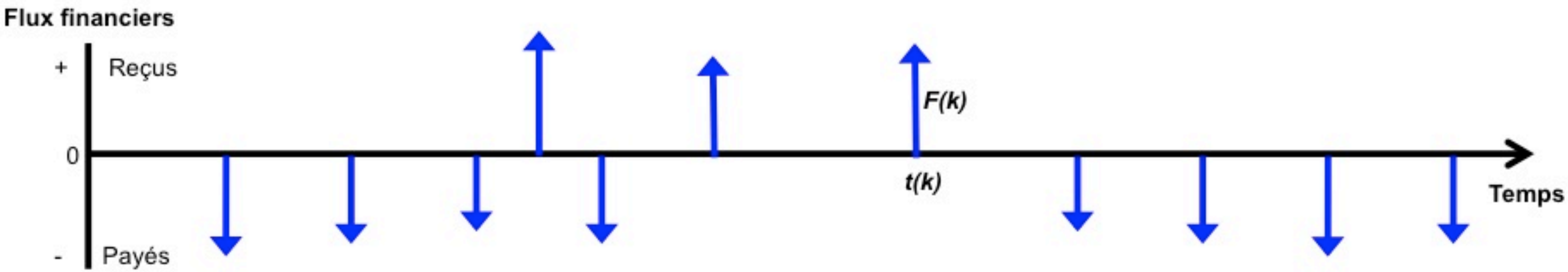
TRI : Taux de Rendement Interne
IRR : Internal Rate of Return

<u>Définition</u> : le TRI d'une série de flux financiers est le taux d'actualisation qui annule la somme des valeurs présentes de ces flux

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{F(k)}{(1+TRI)^{t(k)}} = 0$$

Avec :

- n = nombre de flux financiers
- $F(k)$ = montant du $k^{\text{ième}}$ flux financier, positif ou négatif
- $t(k)$ = temps s'écoulant entre aujourd'hui et la date de paiement du $k^{\text{ième}}$ flux financier, exprimé en années
- TRI = Taux de Rendement Interne

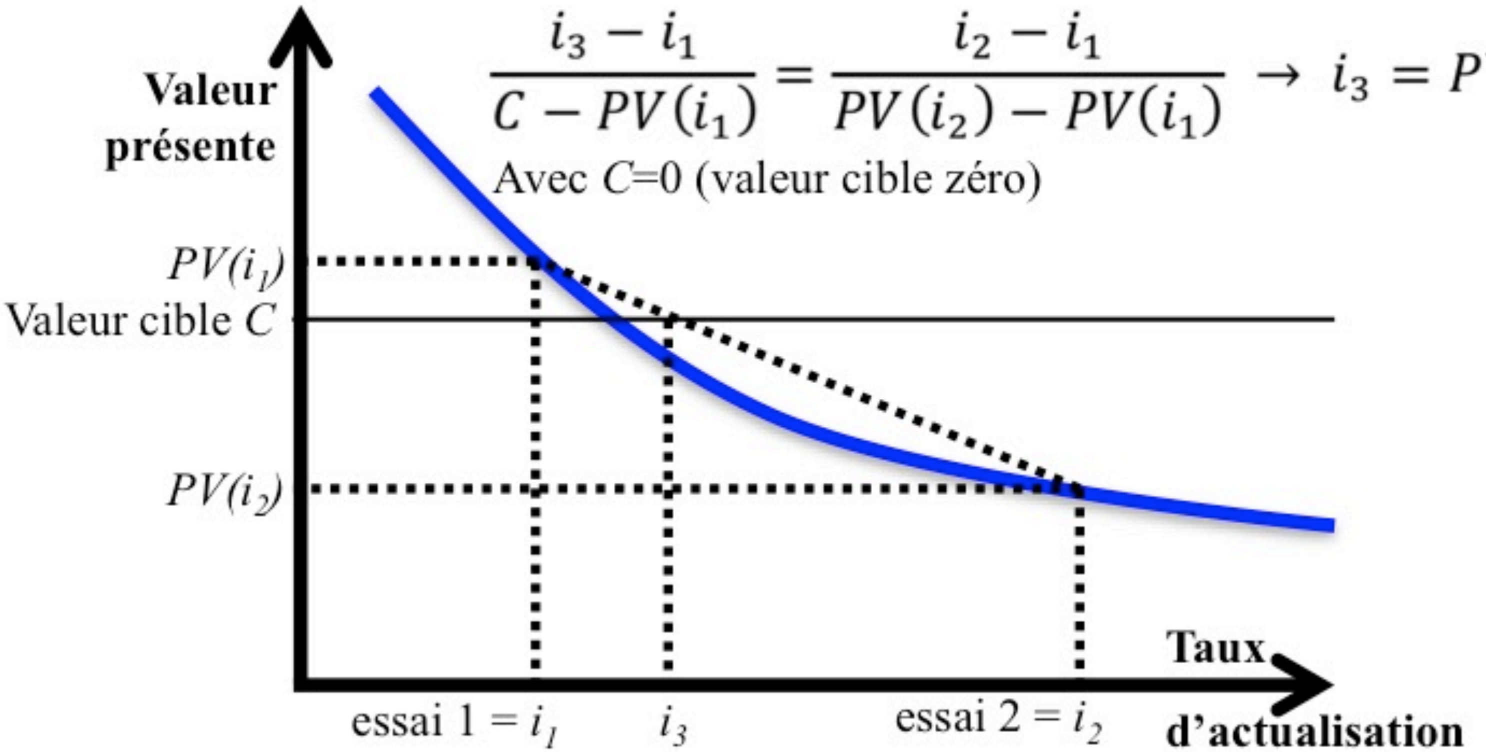


Pour calculer un TRI de flux avec Excel

Pour calculer un TRI avec Excel, on peut utiliser la fonction « Goal Seek », ou bien estimer le TRI par interpolations linéaires successives

$$\frac{i_3 - i_1}{C - PV(i_1)} = \frac{i_2 - i_1}{PV(i_2) - PV(i_1)} \rightarrow i_3 = PV(i_1) \cdot \frac{i_2 - i_1}{PV(i_2) - PV(i_1)}$$

Avec C=0 (valeur cible zéro)



Pour calculer un TRI de flux avec Excel

Calcul du TRI par interpolations linéaires successives :

J4 | fx =+H4-H5*(I4-H4)/(I5-H5)

	A	B	C	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Frequence	1	Paiements par an			**Calculateur manuel de TRI**				
2		TRI	5,5565%			**Taux**	**Taux**	Taux	Taux	Taux	Taux
3						**essai 1**	**essai 2**	interpolé	interpolé	interpolé	interpolé
4					Taux d'actualisation	3,0000%	5,0000%	5,4873%	5,5546%	5,5565%	**5,5565%**
5					Somme valeurs présentes	19,4%	3,8%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%
6											
7				Flux		Valeurs	Valeurs	Valeurs	Valeurs	Valeurs	Valeurs
8			Temps	Totaux		présentes	présentes	présentes	présentes	présentes	présentes
9			0	-100%		-100,0%	-100,0%	-100,0%	-100,0%	-100,0%	-100,0%
10			1	10%		9,7%	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%
11			2	10%		9,4%	9,1%	9,0%	9,0%	9,0%	9,0%
12			3	10%		9,2%	8,6%	8,5%	8,5%	8,5%	8,5%
13			4	10%		8,9%	8,2%	8,1%	8,1%	8,1%	8,1%
14			5	10%		8,6%	7,8%	7,7%	7,6%	7,6%	7,6%
15			6	10%		8,4%	7,5%	7,3%	7,2%	7,2%	7,2%
16			7	10%		8,1%	7,1%	6,9%	6,8%	6,8%	6,8%
17			8	10%		7,9%	6,8%	6,5%	6,5%	6,5%	6,5%
18			9	10%		7,7%	6,4%	6,2%	6,1%	6,1%	6,1%
19			10	10%		7,4%	6,1%	5,9%	5,8%	5,8%	5,8%
20			11	10%		7,2%	5,8%	5,6%	5,5%	5,5%	5,5%
21			12	10%		7,0%	5,6%	5,3%	5,2%	5,2%	5,2%
22			13	10%		6,8%	5,3%	5,0%	5,0%	5,0%	5,0%
23			14	10%		6,6%	5,1%	4,7%	4,7%	4,7%	4,7%
24			15	10%		6,4%	4,8%	4,5%	4,4%	4,4%	4,4%
25			16	0%		0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

Suite géométrique

Rappel du programme de Terminale :

Si $S_n(a) = a^0+a^1+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n$

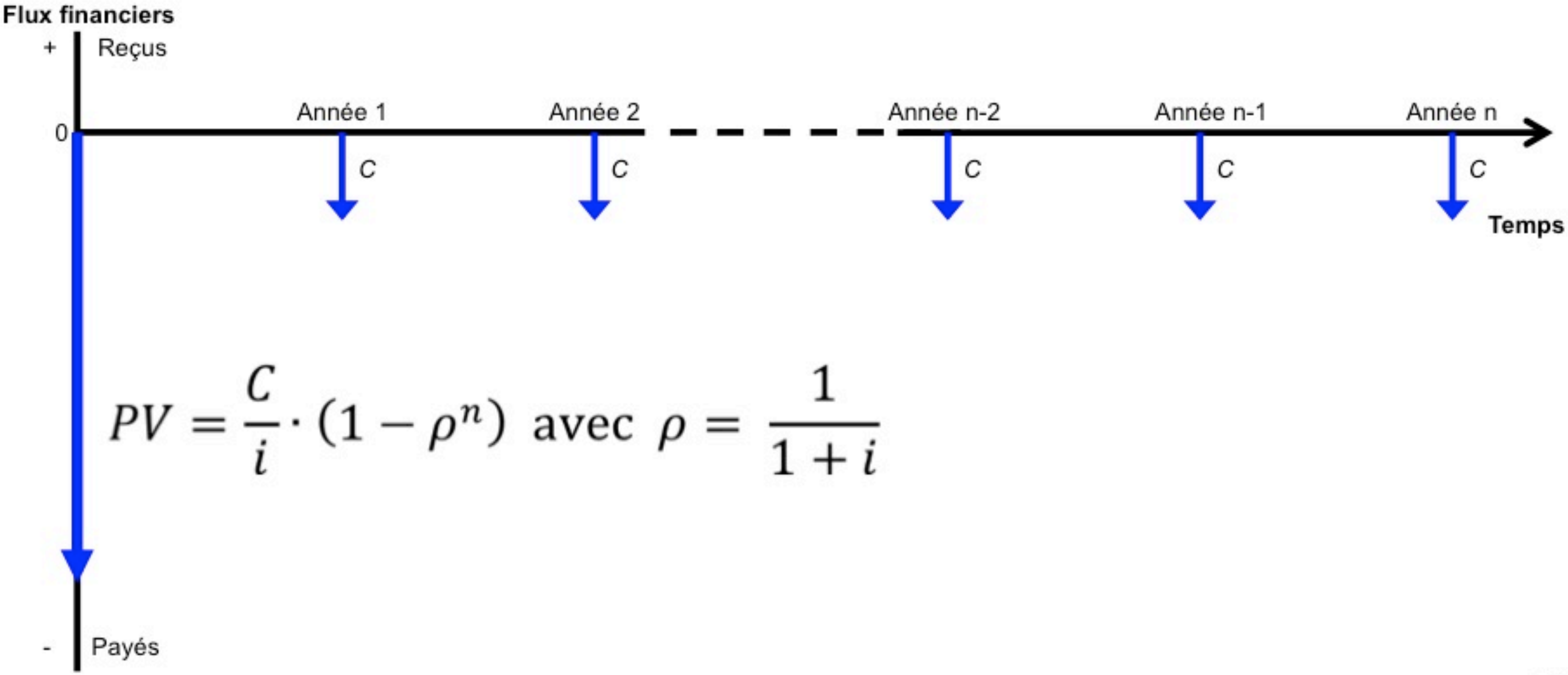
Alors :

$$S_n(a) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

En effet : $a.\ S_n(a) \;=\; a^1+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}+a^n+a^{n+1} \;=\; S_n(a)+a^{n+1}-1$

Application : valeur présente d'une annuité constante finie

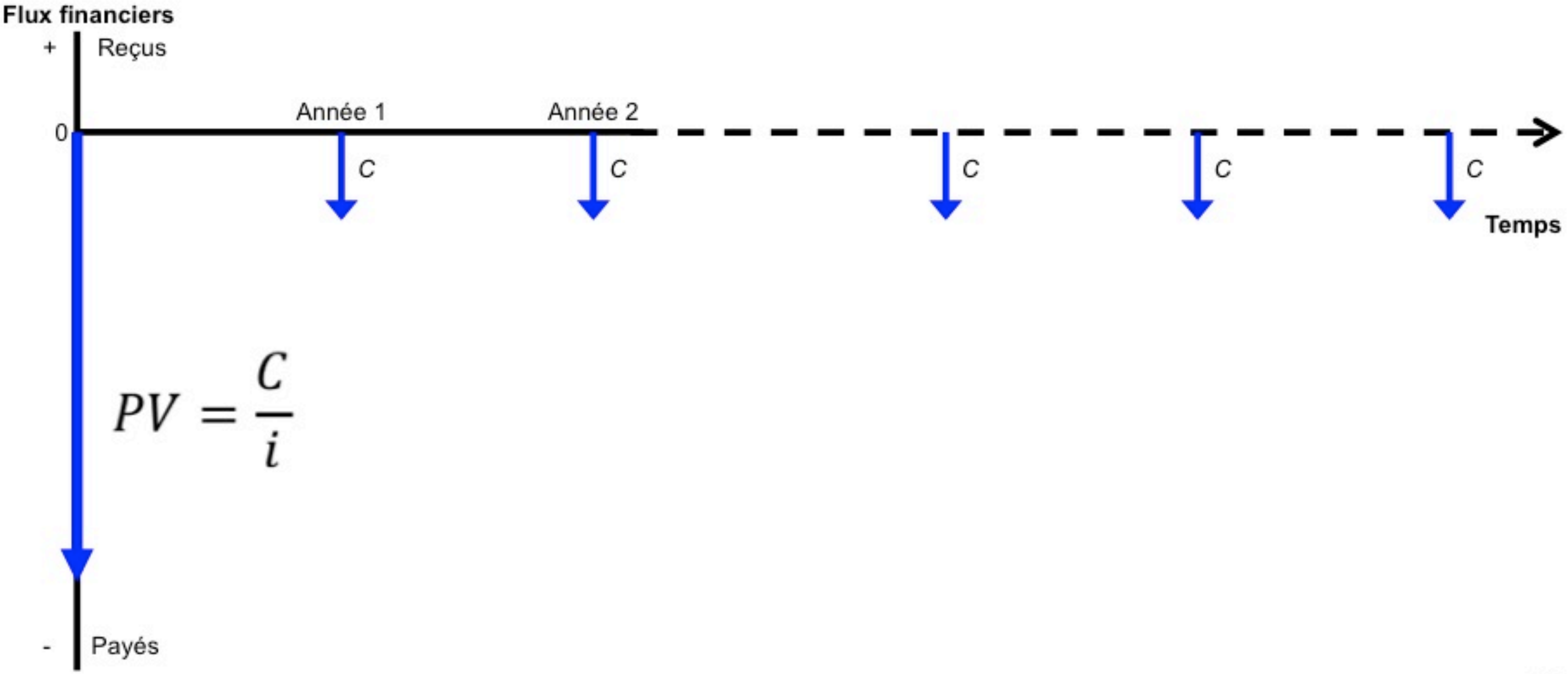
Valeur présente au taux d'actualisation i d'une série de n coupons annuels C



$$PV = \frac{C}{i} \cdot (1 - \rho^n) \text{ avec } \rho = \frac{1}{1+i}$$

Application : valeur présente d'une annuité constante infinie

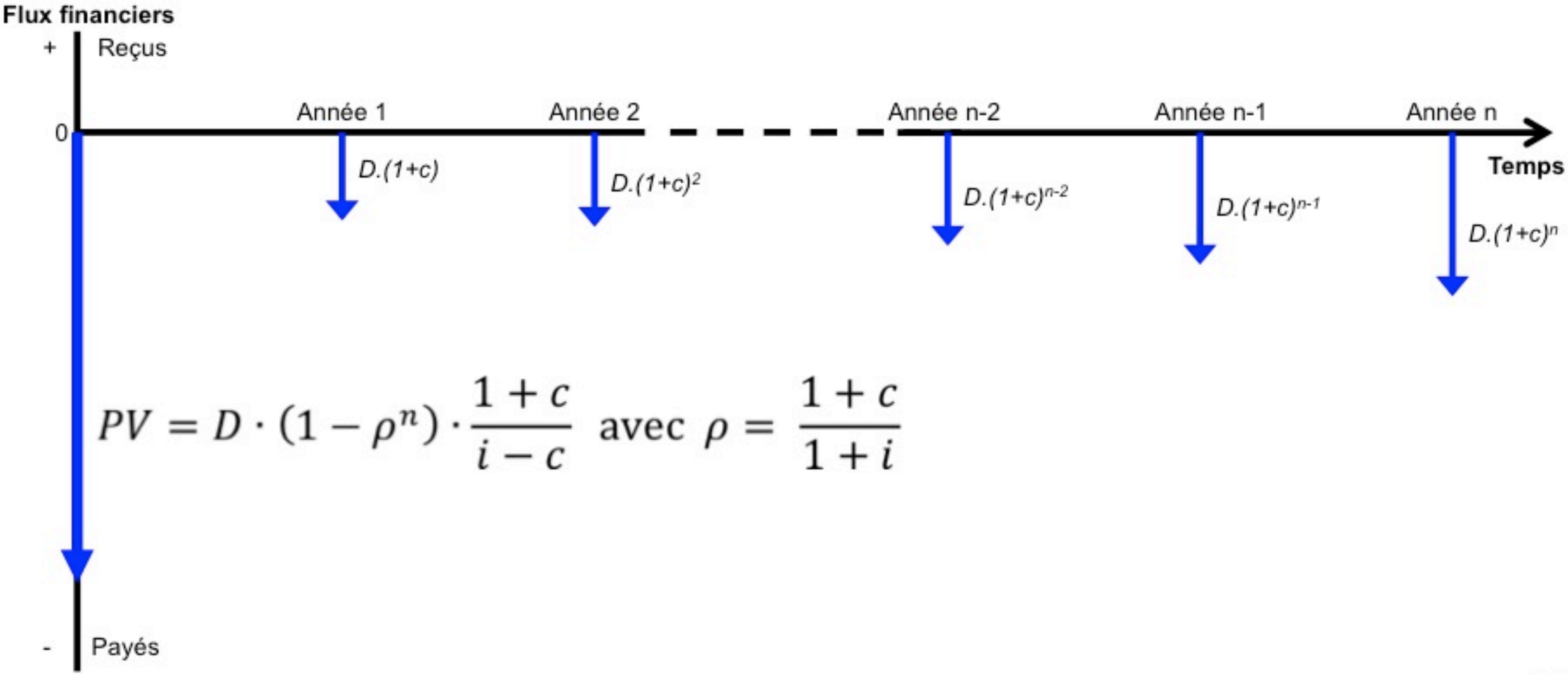
Valeur présente au taux d'actualisation i d'une série infinie de coupons annuels C



$$PV = \frac{C}{i}$$

Application : valeur présente d'une série finie de dividendes croissants

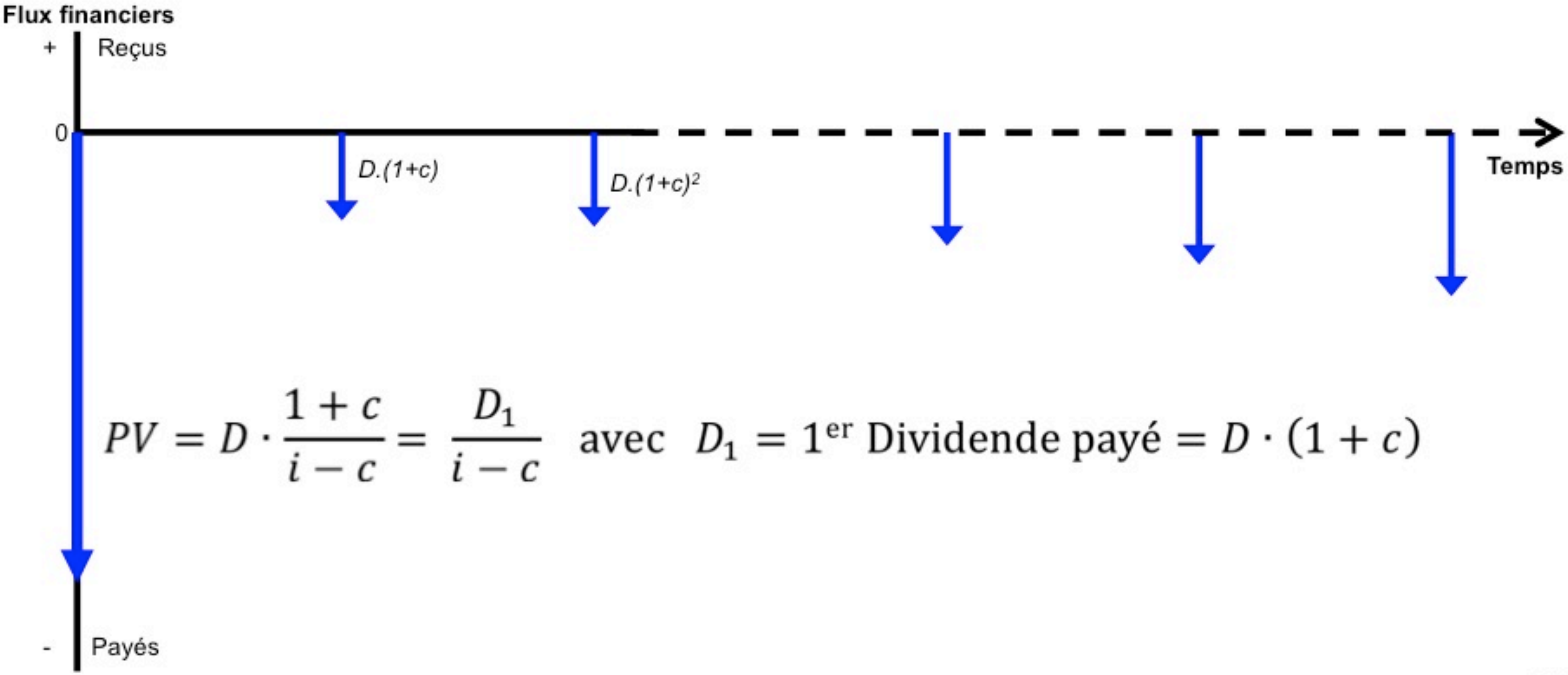
Valeur présente au taux d'actualisation i d'une série de n dividendes annuels D croissant au taux de croissance annuel c



$$PV = D \cdot (1 - \rho^n) \cdot \frac{1+c}{i-c} \text{ avec } \rho = \frac{1+c}{1+i}$$

Application : valeur présente d'une série infinie de dividendes croissants

Valeur présente au taux d'actualisation *i* d'une série infinie de dividendes annuels *D* croissant au taux de croissance annuel *c* **inférieur à *i***



$$PV = D \cdot \frac{1+c}{i-c} = \frac{D_1}{i-c} \quad \text{avec} \quad D_1 = 1^{\text{er}} \text{ Dividende payé} = D \cdot (1+c)$$

Taux d'intérêt « zéro coupon » : introduction

Jusqu'ici, nous avons utilisé un taux d'actualisation constant : nous l'avons supposé indépendant de la date à laquelle chaque flux financier était payé.

Or nous savons qu'en réalité, les taux d'intérêts aux différentes maturités ne sont pas les mêmes : il y a une « courbe des taux ».

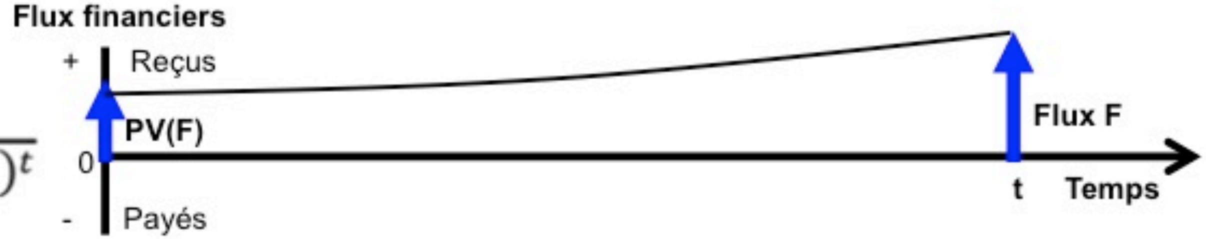
Cette courbe des taux est une courbe de taux d'intérêts obligataires, c'est-à-dire d'instruments qui détachent un coupon régulier (e.g. annuel).

<u>Question</u> : quel taux d'actualisation retenir pour calculer la valeur présente d'un flux financier intervenant n'importe quand dans le futur ?

<u>Réponse</u> : il faut utiliser une courbe de taux « zéro coupon ». On détermine cette courbe de taux « zéro coupon » à partir de la courbe de taux « coupons »

$$PV(F) = F \cdot \frac{1}{(1 + ZC_t)^t}$$

Taux zéro coupon de la maturité t



Taux d’intérêt « zéro coupon » : construction

Construction d’une courbe des taux d’intérêt zéro coupon de proche en proche (méthode dite du « bootstrap »)

Méthode : partir d’un taux d’intérêt « coupon », calculer le taux d’intérêt « zéro coupon » par différence, c’est-à-dire en tenant compte du fait que les taux zéro coupon intermédiaires sont connus

Remarque : dans une courbe des taux d’intérêt « coupons », les taux d’intérêt inférieurs ou égaux à 1 an sont des taux « zéro coupon »

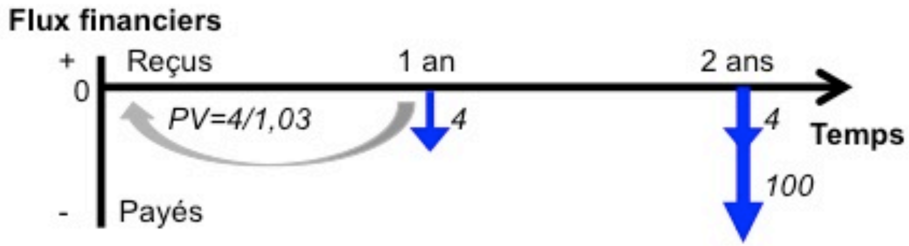
Exercice :

- Le taux coupon 1 an est égal à 3%
- Le taux coupon 2 ans est égal à 4%
- Calculer le taux zéro coupon 1 an et le taux zéro coupon 2 ans.

Construction d'un taux d'intérêt « zéro coupon » 2 ans

Corrigé de l'exercice :

- Taux d'intérêt « zéro coupon » 1 an
  - Le taux 1 an « coupon » est égal à 3%. Cela signifie que :
    - la valeur présente de 103 dans un an est égale à 100
    - **le taux « zéro coupon » 1 an est égal à 3%**
- Quelle est la valeur présente d'un flux unique dans 2 ans ?

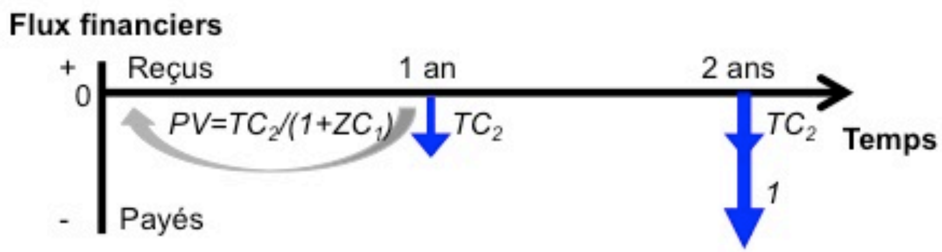


  - Le taux 2 ans « coupon » est égal à 4%. Cela signifie que
    - la somme des valeurs présentes d'un flux de 4 dans 1 an et d'un flux de 104 dans 2 ans est égale à 100
    - Or, on connaît la valeur présente d'un flux de 4 dans 1 an, car on connaît le taux « zéro coupon » 1 an (3%) : c'est 4/1,03 = 3,8834
    - Par différence, on en déduit la valeur présente de 104 dans 2 ans, à savoir 96,1166
    - Si ZC_2 désigne le taux « zéro coupon » 2 ans, on a $96{,}1166 = 104/(1+ZC_2)^2$
    - **On trouve ZC_2=4,02%**

Calcul du taux d'intérêt « zéro coupon » 2 ans

- Le taux d'intérêt 2 ans « coupon » est égal à TC_2
  - Cela signifie que la somme des valeurs présentes d'un flux de TC_2 dans 1 an et d'un flux de $1+TC_2$ dans 2 ans est égale à 1
  - Or, on connaît la valeur présente d'un flux de TC_2 dans 1 an, car on connaît déjà ZC_1 : c'est $TC_2/(1+ZC_1)$
  - Par différence, on en déduit la valeur présente du flux de $1+TC_2$ dans 2 ans : c'est $1 - TC_2/(1+ZC_1)$
  - Or, la valeur présente du flux de $1+TC_2$ dans 2 ans est aussi égale à $(1+TC_2)/(1+ZC_2)^2$
  - Donc $(1+TC_2)/(1+ZC_2)^2 = 1 - TC_2/(1+ZC_1)$
  - Et :

$$ZC_2 = \sqrt{\frac{1+TC_2}{1-TC_2\cdot\rho_1}}-1 \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \frac{1}{1+ZC_1}$$



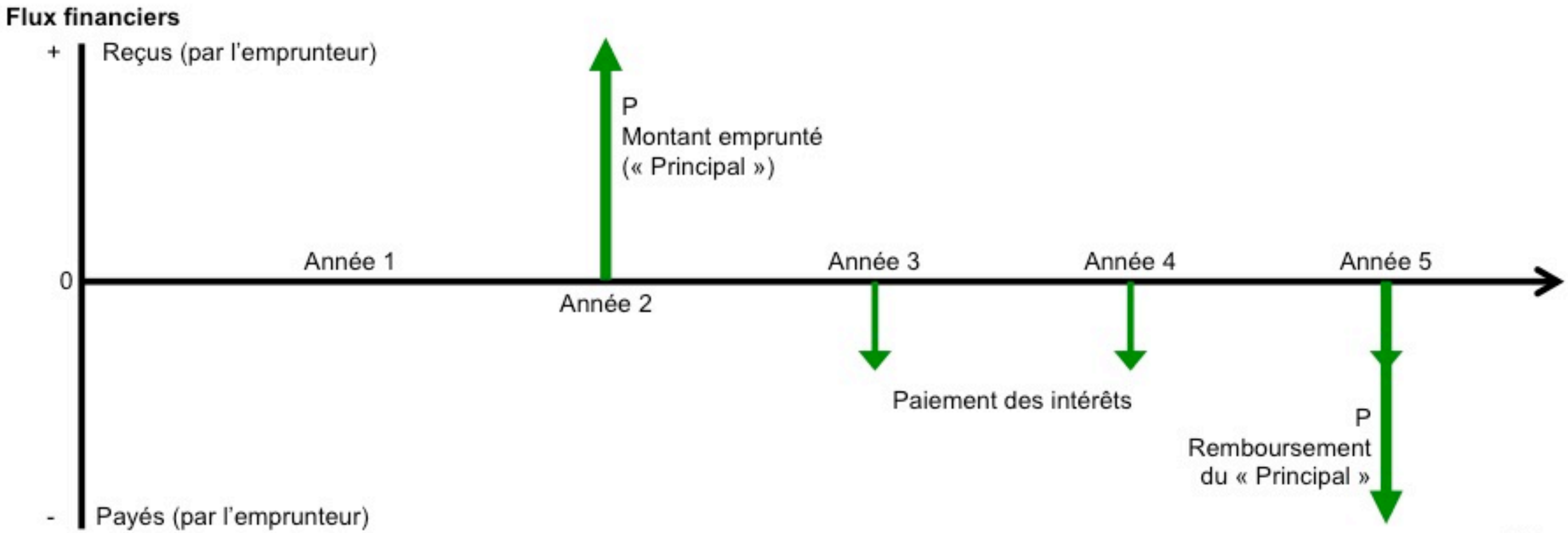
Calcul du taux d'intérêt « zéro coupon » *n* ans

- On fait l'hypothèse que, pour k allant de *1* à *n-1*, on connaît déjà tous les taux d'intérêt « zéro coupon » ZC_k et les facteurs d'actualisation $\rho_k = 1/(1+ZC_k)^k$
- Le taux d'intérêt *n* ans « coupon » est égal à TC_n.
  - Cela signifie que la somme des valeurs présentes d'une série de *n-1* flux annuels de TC_n et d'un flux de $1+TC_n$ dans *n* ans est égale à 1
  - Or, on connaît la valeur présente des *n-1* premiers flux annuels TC_n : c'est TC_n multiplié par la somme pour k allant de 1 à *n-1* des ρ_k
  - Par différence, on en déduit la valeur présente du flux de $1+TC_n$ dans *n* ans, c'est 1 – la valeur présente des *n-1* premiers flux annuels TC_n
  - Or, la valeur présente du flux de $1+TC_n$ dans *n* ans est aussi égale à $(1+TC_n)/(1+ZC_n)^n$
  - Donc :

$$ZC_n = \sqrt[n]{\frac{1+TC_n}{1-TC_n \cdot \sum_{k=1}^{k=n-1} \rho_k}} - 1 \quad \text{avec} \quad \rho_k = \frac{1}{(1+ZC_k)^k}$$

Construction d'un taux d'intérêt « à terme »

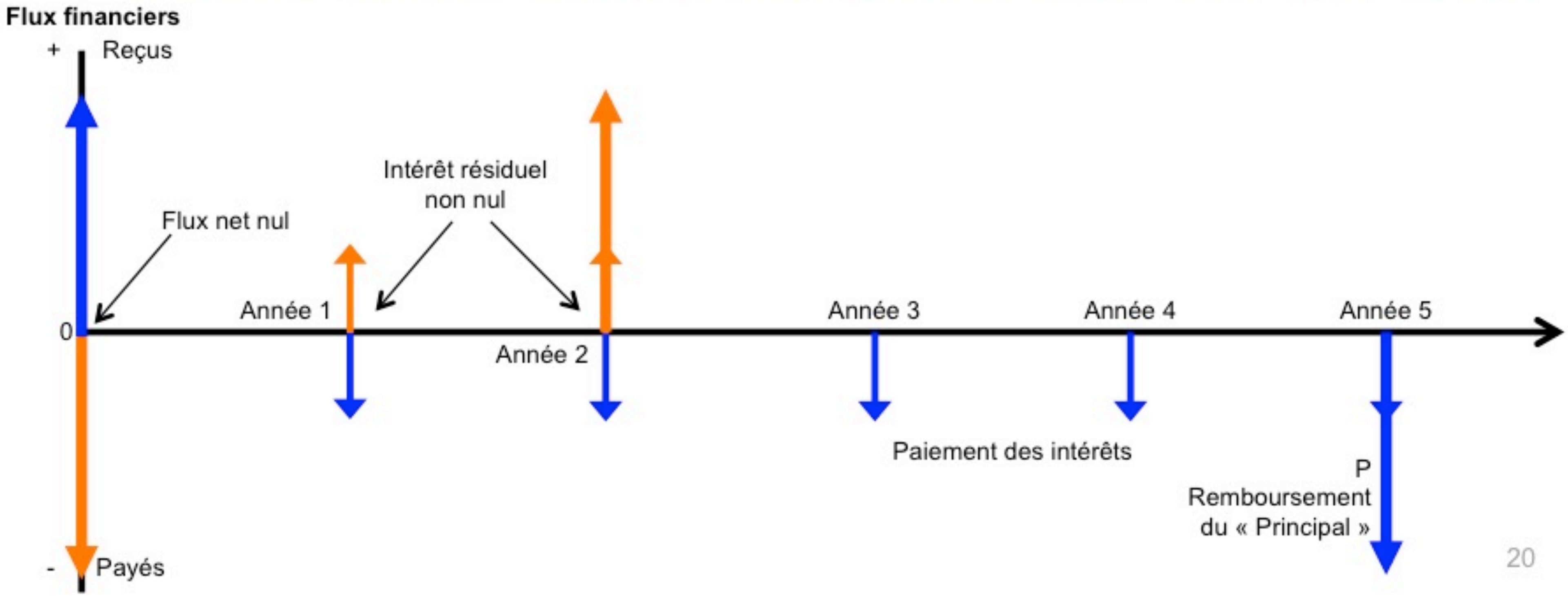
- On fait l'hypothèse que toute la courbe des taux d'intérêt « zéro coupon » est connue
- On cherche à se construire dès maintenant un taux « coupon » emprunteur à terme, c'est-à-dire avec une date de départ dans le futur
- Par exemple : taux « coupon » emprunteur 3 ans dans 2 ans



Construction d'un taux d'intérêt « à terme »

Pour construire un taux d'intérêt emprunteur « coupon » 3 ans dans 2 ans :

- **On emprunte dès aujourd'hui à 5 ans**
- **On « re-prête » le même montant sur 2 ans**, durant la période où on n'a pas besoin des capitaux. Les flux financiers nets aujourd'hui sont nuls.
- Tous les coefficients d'actualisation étant connus, il est possible de « répartir » les flux résiduels aux années 1 et 2, provenant de la différence ente le taux 2 ans (période courte) et le taux 5 ans (période longue), sur les années 3, 4 et 5 (au programme du prochain TD).



Construction d’un prix « à terme »

On peut construire un niveau de cours à terme pour toutes sortes de biens financiers ou de biens réels :

- Cours de change à terme
- Prix d’une action à terme
- Prix d’une matière première à terme
- Inflation à terme
- Taux de défaut à terme
- Etc.

La méthode pour calculer le cours à terme est à chaque fois la même : transaction au comptant et prêt-emprunt (de cash, de devises, de titres, etc.) sur la période

En pratique, les intervenants s’échangent des cours à terme sans réaliser des prêts-emprunts physiques

Risque de taux : définitions

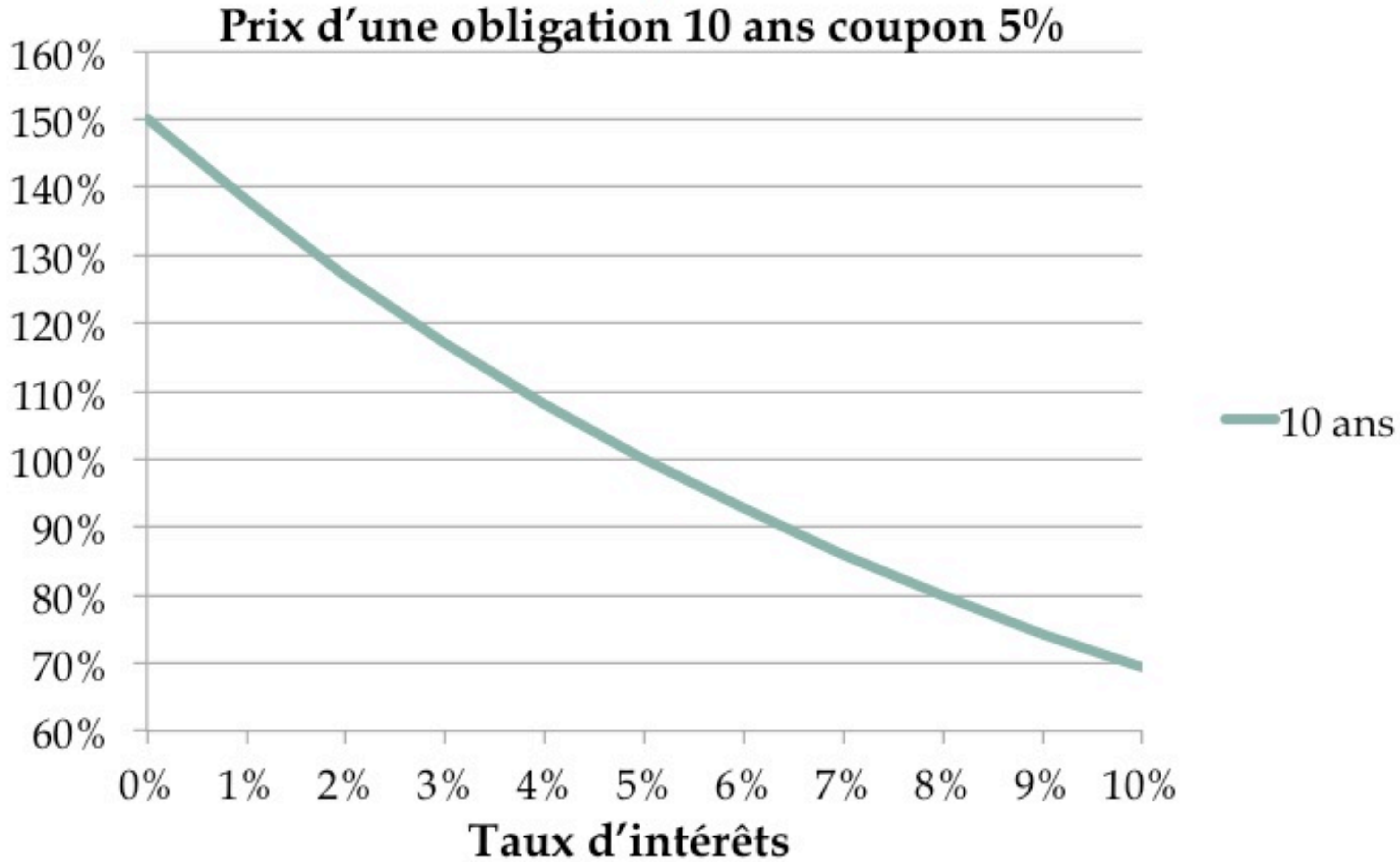
Ne pas confondre flux et valeur !

En cas de variation des taux d'intérêt :
- Flux : comment se comportent les intérêts futurs ?
- Valeur : comment évolue la valeur de marché de l'instrument ?

Les risques de taux des instruments à taux variables et à taux fixes sont très différents :
- Instruments à taux variables : flux variables mais valeurs de marché stables
- Instruments à taux fixes : flux fixes mais valeurs de marché instables

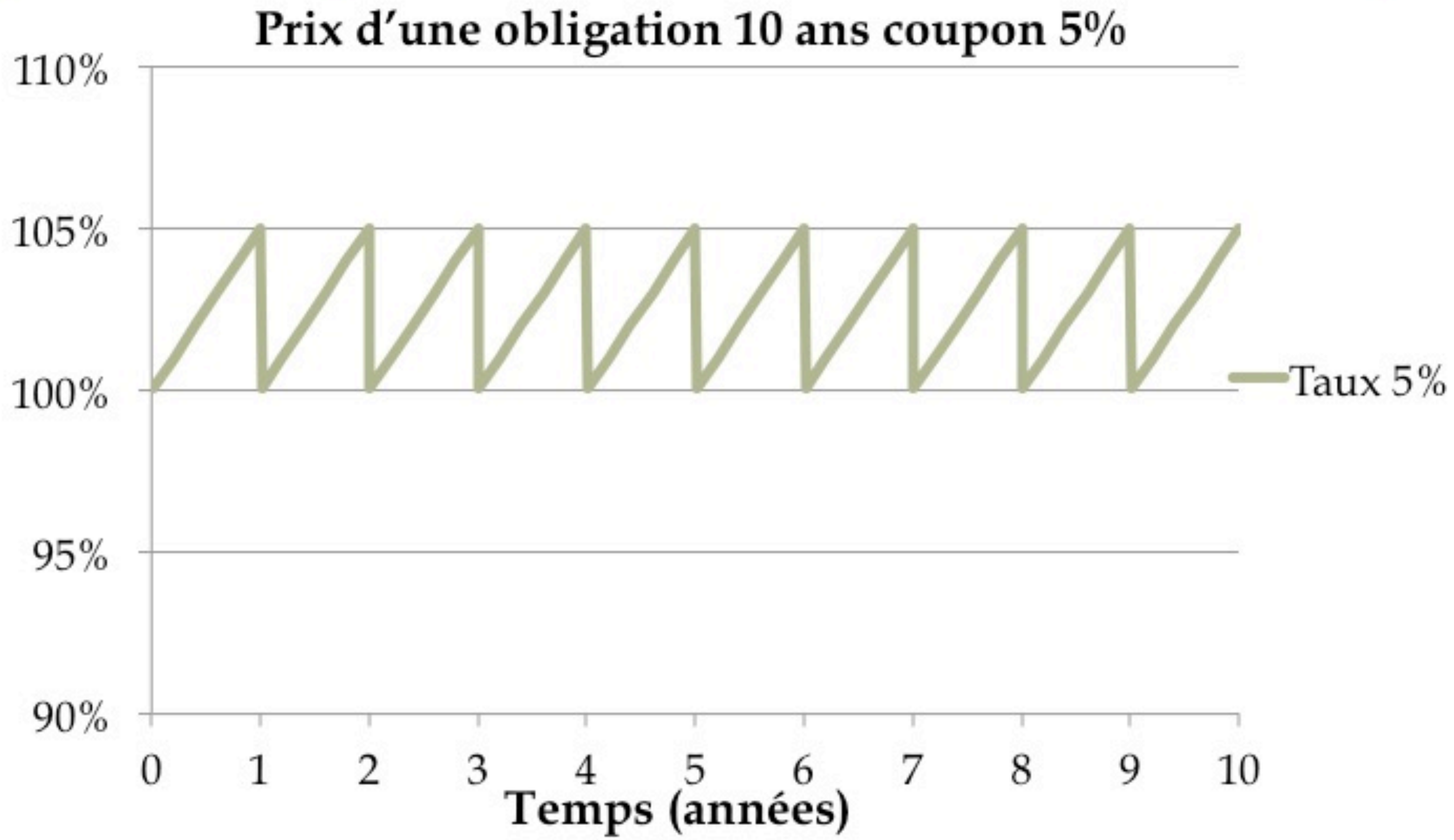
Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Le prix d'une obligation à taux fixe monte quand les taux baissent, et inversement. Cette relation n'est pas linéaire mais convexe :



Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Quand le temps passe et que les taux d'intérêts sont stables, le prix d'une obligation s'accroit, car la valeur présente de tous les flux augmente progressivement (sauf au moment des « détachements de coupon »).



Risque de taux d'une obligation à taux fixe

En pratique, quand on s'intéresse aux évolutions des prix des obligations, on sépare la partie de la variation du prix qui provient du passage du temps à court terme (paiement du coupon) du reste.

Ainsi, on décompose le prix d'une obligation en

- une partie « coupon couru » : c'est la portion du coupon calculée pro rata temporis depuis la dernière date de détachement de coupon
- une partie « prix pied de coupon », qui s'obtient simplement par différence

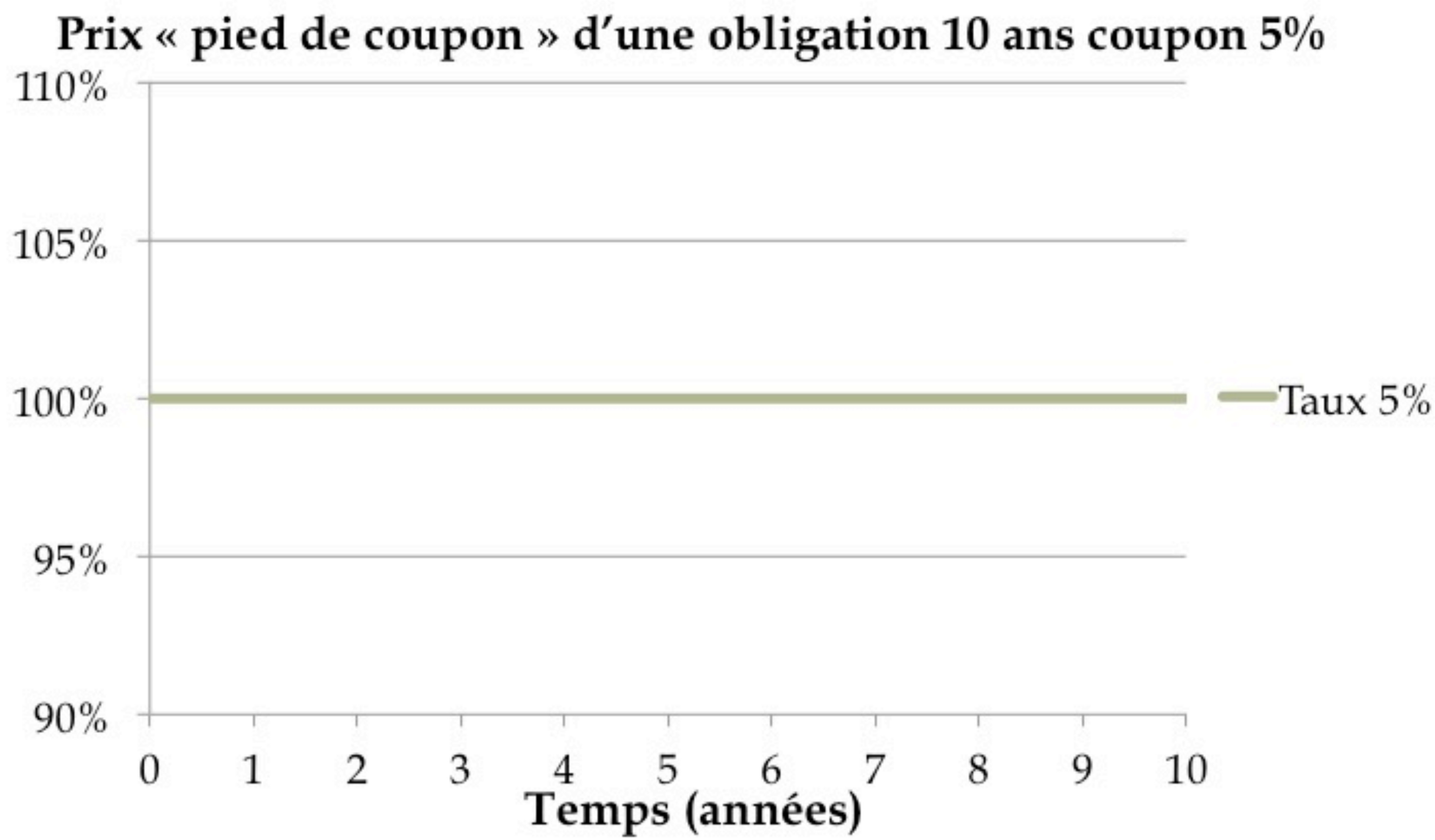
- P = « Coupon Couru » + Prix « pied de coupon »
- $P = CC + P_{pdc}$

Avec

- CC = C . (nombre de jours depuis la dernière date de détachement de coupon)/365
- $P_{pdc} = P - CC$

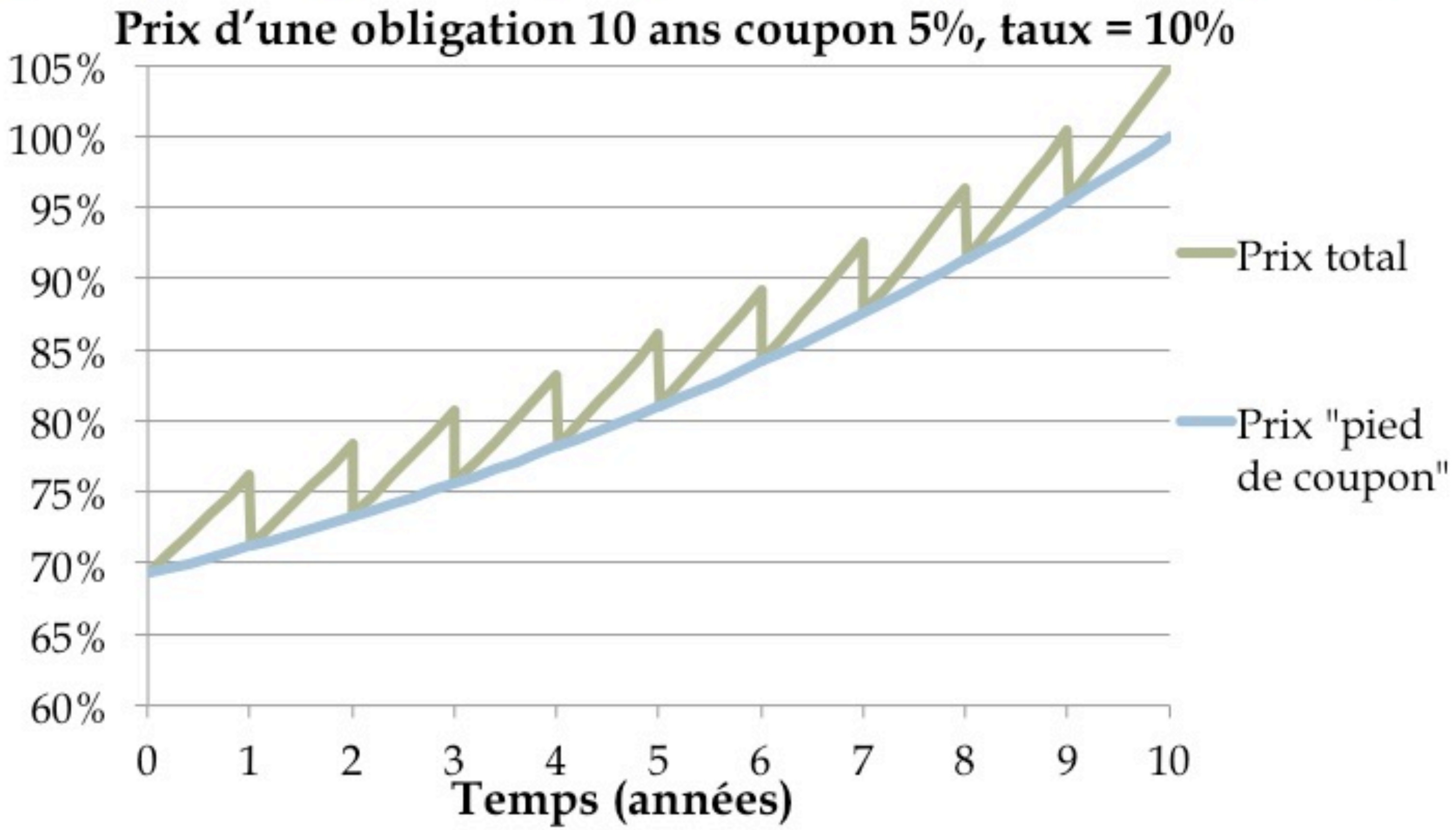
Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Prix « pied de coupon » = Prix – « coupon couru »



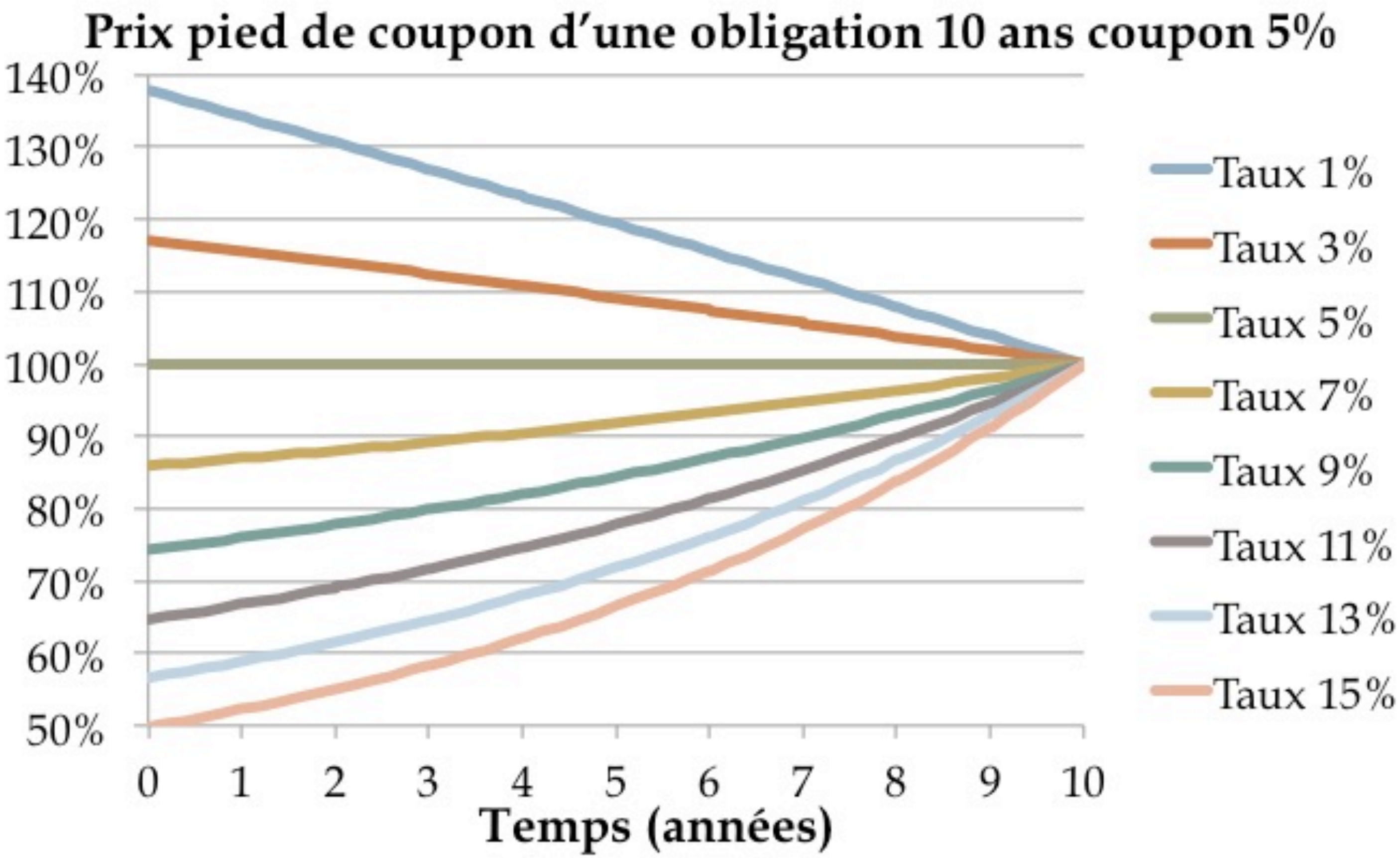
Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Quand le temps passe et que les taux d'intérêts sont stables, le prix d'une obligation s'accroit, pour atteindre 100%+Coupon à la maturité finale de l'obligation (convergence du prix pied de coupon vers le « pair »).



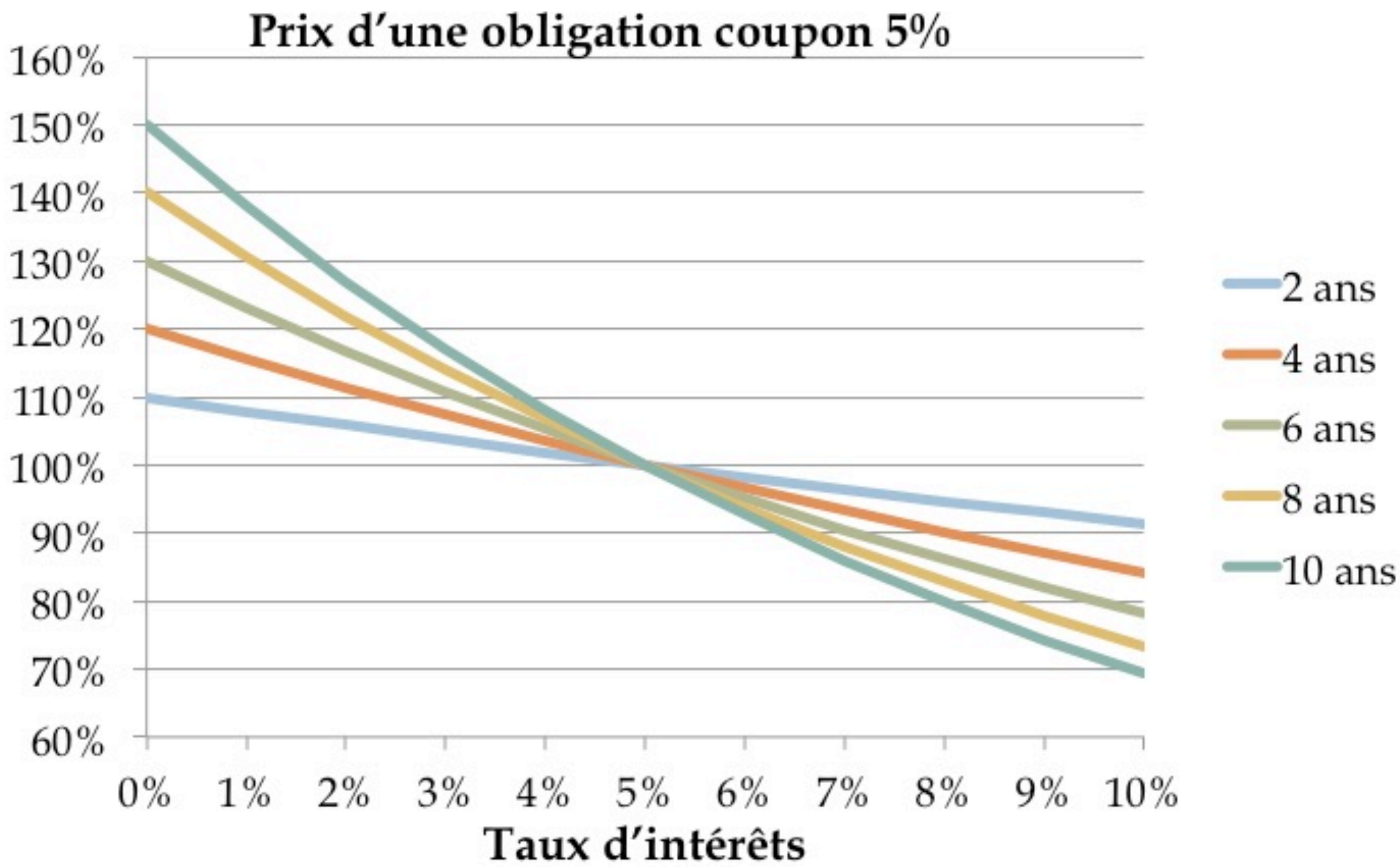
Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Quand le temps passe et que les taux d'intérêts sont stables, le prix pied de coupon d'une obligation converge vers le « pair ».



Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Plus la maturité d'une obligation est longue, plus le prix de celle-ci est sensible aux variations des taux d'intérêts.



Risque de taux d'une obligation à taux fixe

La sensibilité du prix d'une obligation aux variations des taux d'intérêts se mesure par sa « sensibilité ». La sensibilité est le rapport entre la variation relative de prix $\Delta P/P$ et la variation de taux Δi. La sensibilité est toujours négative, mais on en parle souvent en valeur absolue.

Exemple : une valeur absolue de sensibilité égale à 7 signifie que la variation relative du prix de l'obligation est 7 fois plus importante que la variation de taux (et en sens inverse) :

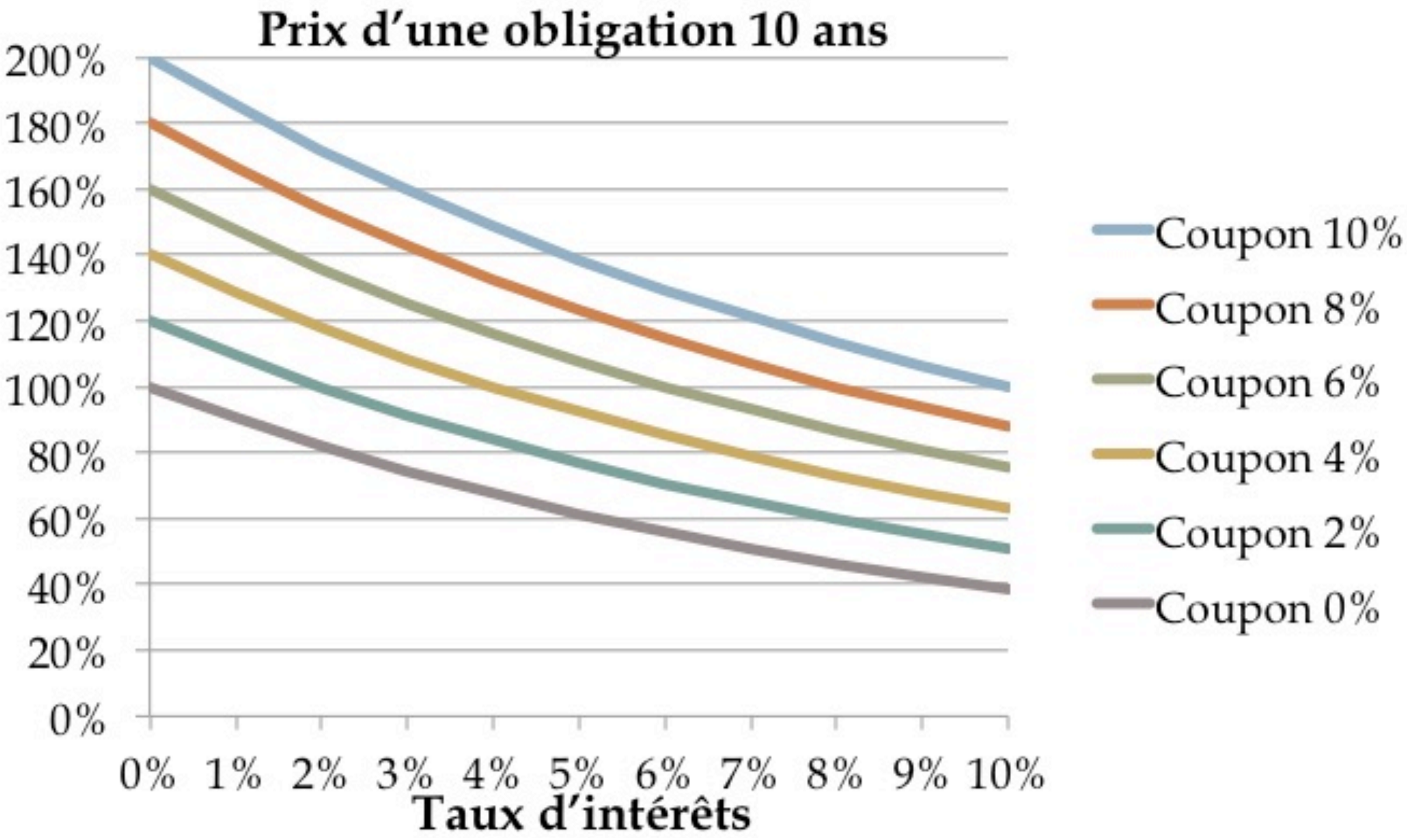
- Si les taux varient de +0,01%, la variation relative de son prix sera de -0,07%
- Δi = 0,01% => $\Delta P/P$ = -0,07%

La valeur absolue de la sensibilité est d'autant plus élevée que :

- La maturité de l'obligation est longue
- Les taux d'intérêts sont bas
- Le coupon de l'obligation est petit

Risque de taux d'une obligation à taux fixe

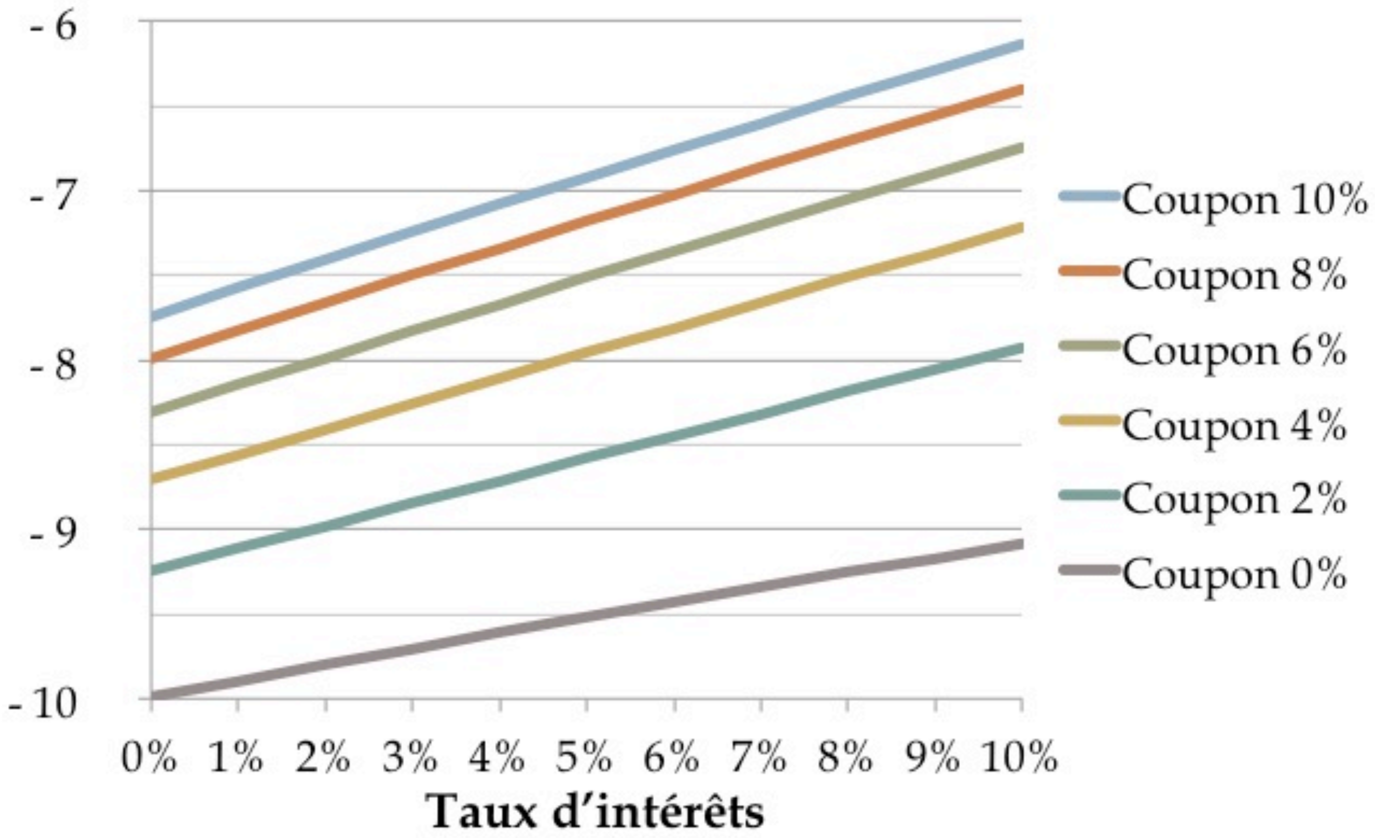
Le prix d'une obligation 10 ans à coupon élevé a l'air plus sensible aux variations de taux qu'une obligation à taux bas. C'est vrai en valeur absolue, mais faux en valeur relative.



Risque de taux d'une obligation à taux fixe

La « sensibilité relative » (relative à son prix) d'une obligation 10 ans est d'autant plus élevée en valeur absolue que son coupon est bas. On l'appelle « sensibilité ».

Sensibilité d'une obligation 10 ans



Risque de taux d'une obligation à taux fixe

Sensibilité et duration :

Par définition de la sensibilité S : $S = \dfrac{\frac{\mathrm{d}P}{P}}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{P} \cdot \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}$

Or $P = \sum_{t=1}^{t=n} \dfrac{CF(t)}{(1+i)^t}$

Donc $S = -\dfrac{1}{1+i} \cdot \dfrac{1}{P} \cdot \sum_{t=1}^{t=n} t \cdot \dfrac{CF(t)}{(1+i)^t}$

Dans la somme, on reconnaît les dates de paiement *t* pondérées par les valeurs des flux de l'obligation.

On appelle « duration » la moyenne des dates de paiement pondérée par les valeurs présentes des flux de l'obligation, divisée par le prix de l'obligation. C'est une sorte de durée de vie moyenne.

Donc $S = -\dfrac{D}{1+i}$

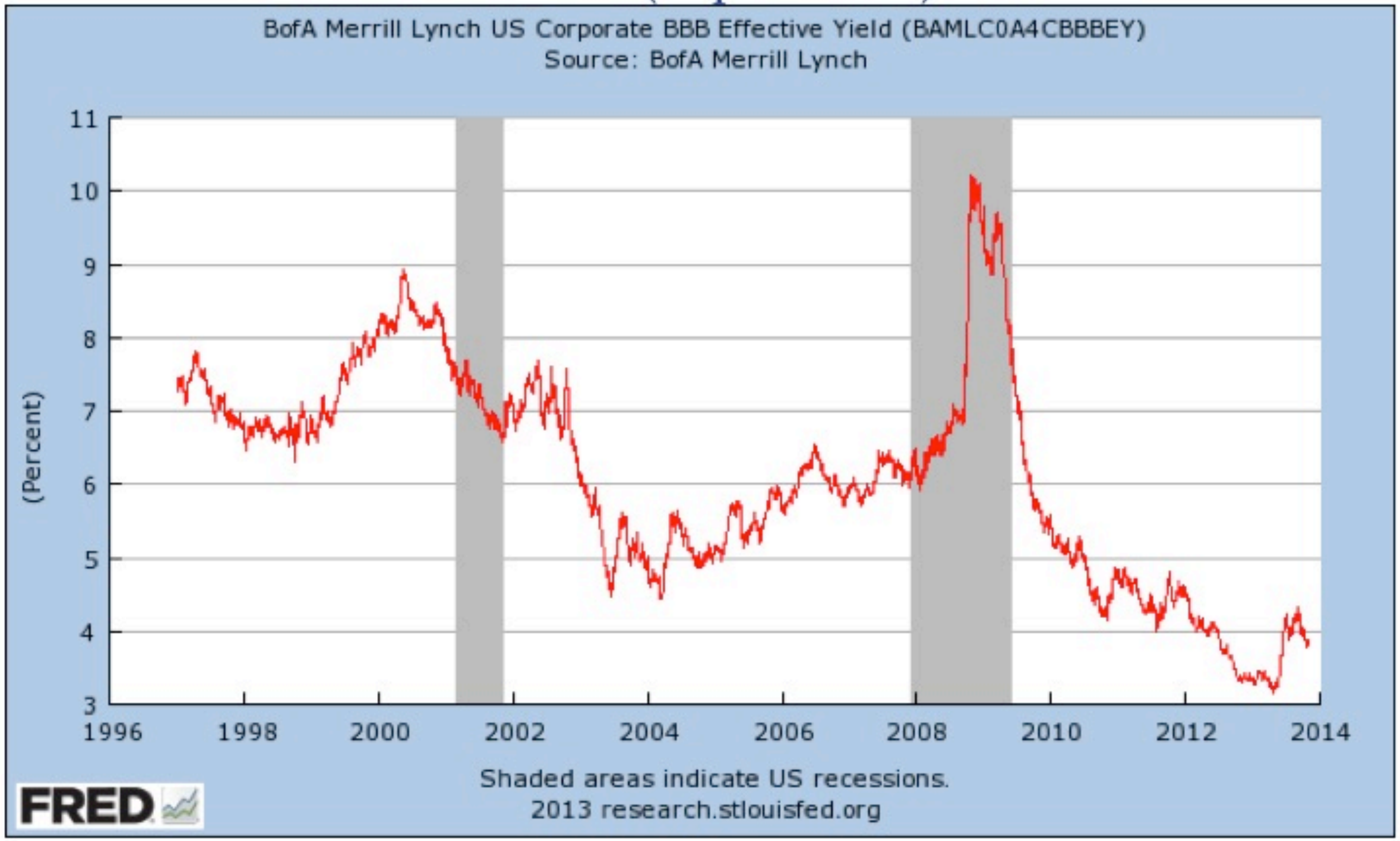
Lexique

Quelques termes usuels sur les marchés obligataires :

- **Nominal** ou montant facial : montant sur lequel porte le calcul du coupon
- **Coupon** : intérêt
- **Taux du coupon** : intérêt = coupon = taux du coupon . montant nominal
- **Taux de marché ou TRA (Taux de Rendement Actuariel) ou YTM (Yield to maturity) =** TRI (Taux de Rendement Interne) de l'obligation à son prix de marché
- **Périodicité** (du paiement des coupons) : annuel, semestriel, etc.
- **Coupure** : montant nominal unitaire d'une obligation (plus petit montant nominal sur lequel on peut traiter). Par exemple 1 000 euros.
- **Pair** = 100% du nominal
- **Prix d'émission** : prix auquel l'obligation a été émise pour la première fois (le prix est différent du pair si le taux à l'émission est différent du taux du coupon).
- **Fongibilité :** lorsque l'émetteur émet des obligations strictement identiques à des obligations existantes (sauf le prix d'émission !), elles deviennent **fongibles** : on ne distingue plus les nouvelles des anciennes.
- **Prix de remboursement** : habituellement le pair.
- **Maturité :** Date au delà de laquelle l'obligation disparaît (tous les flux on été payés)
- **Remboursement « in fine » :** remboursement du principal en une fois à maturité

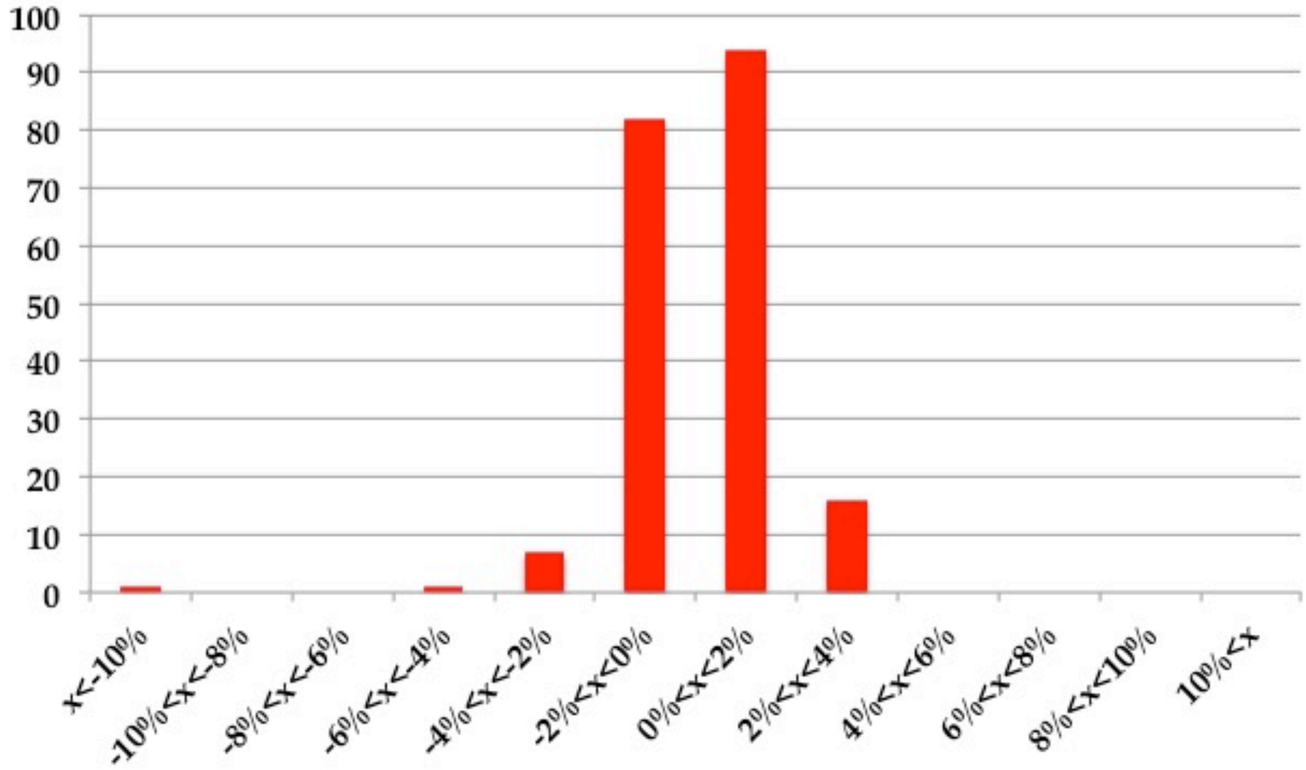
A part le risque de faillite, les obligations sont-elles risquées ?

Variations des taux de marché des obligations d'entreprises BBB aux USA (depuis 1997)



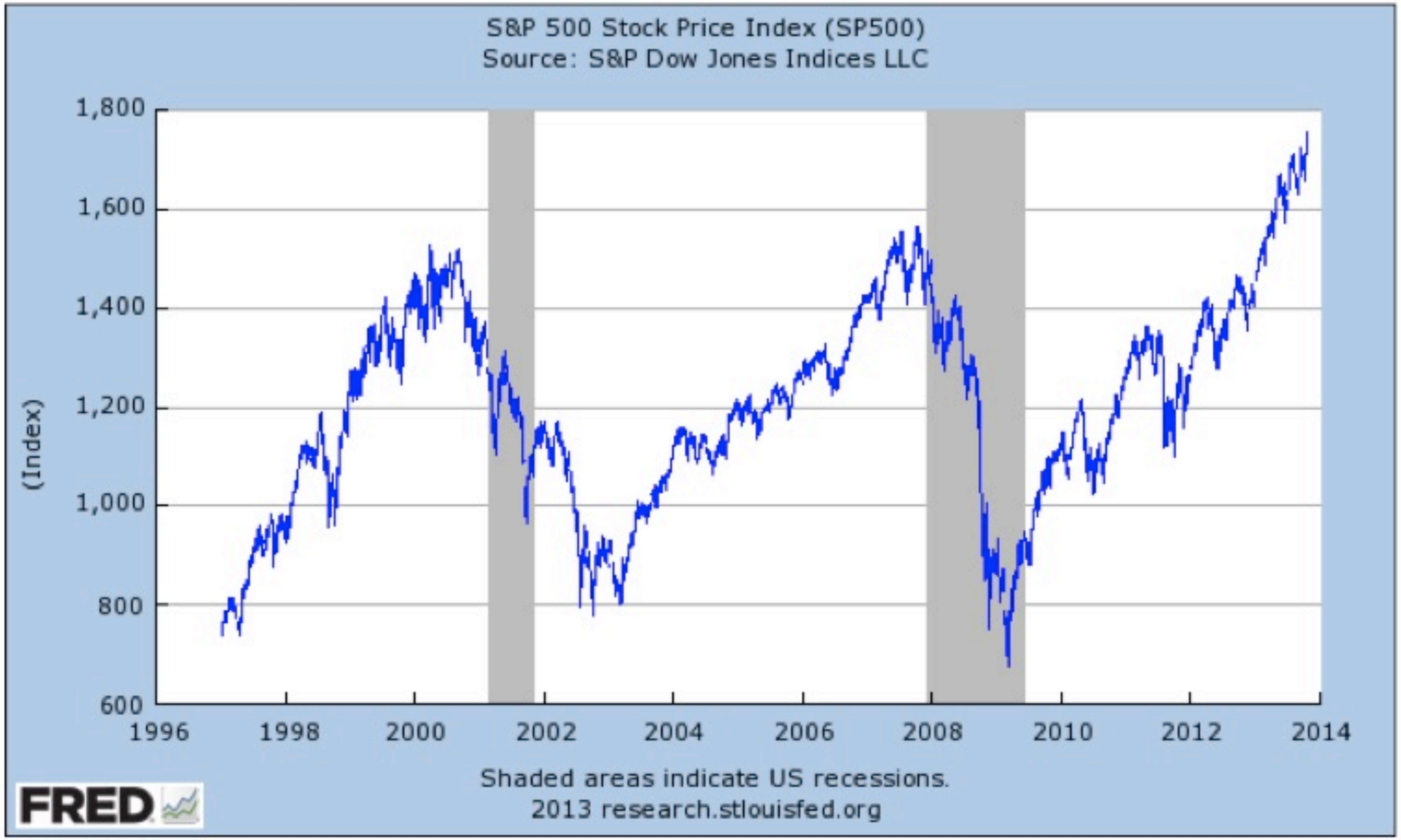
A part le risque de faillite, les obligations sont-elles risquées ?

Variations de prix : distribution des variations mensuelles « théoriques » de prix des obligations d'entreprises BBB aux USA (en multipliant les variations mensuelles de taux par une sensibilité de 5)



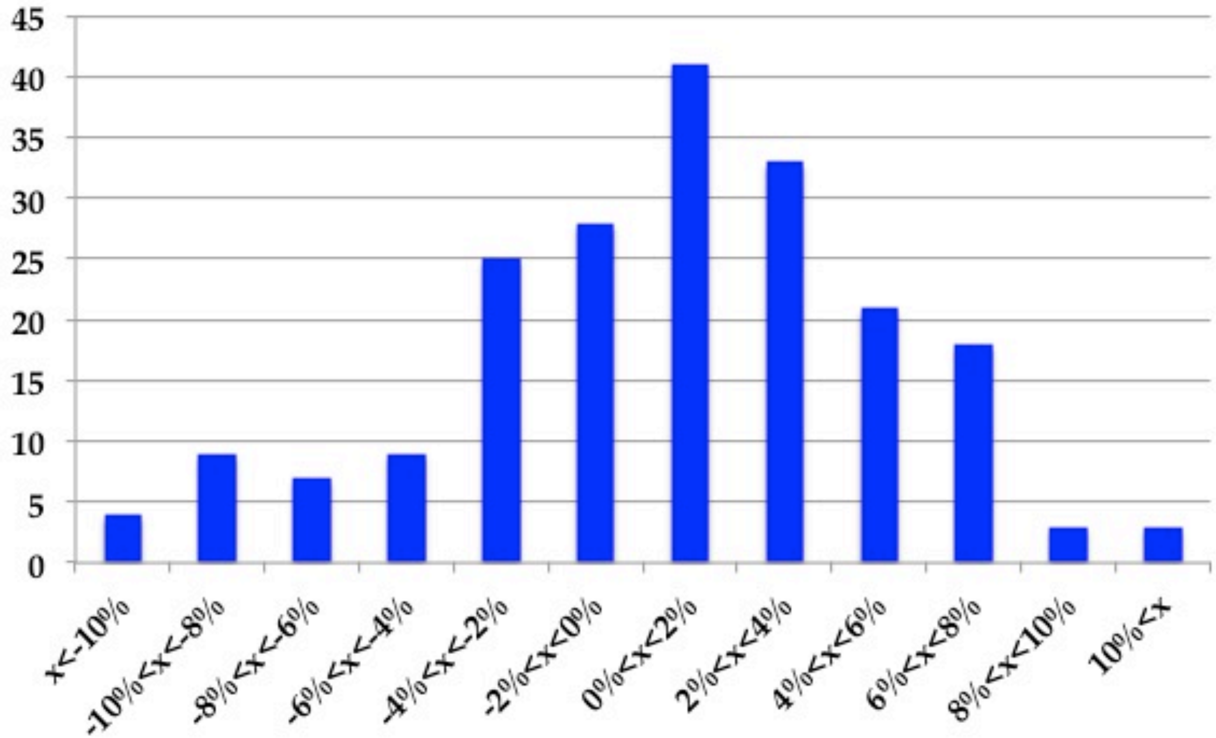
Et le risque actions ?

Variations de l'indice actions S&P 500 depuis 1997



Et le risque actions ?

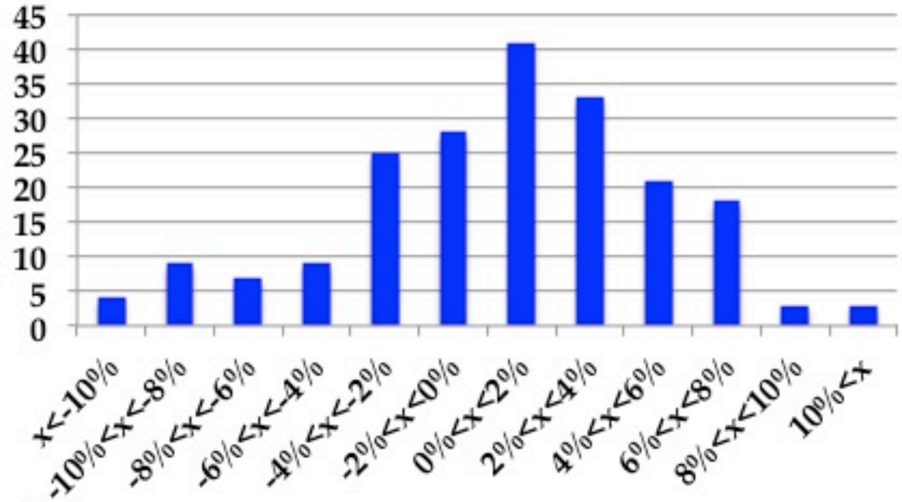
Distribution des variations mensuelles de l'indice actions S&P 500 depuis 1997



Risque de taux vs risque actions

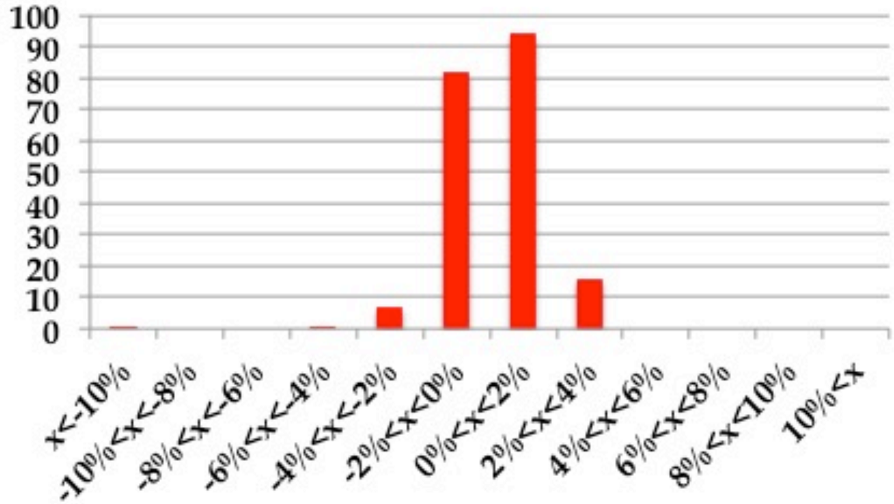
Comparaison des distributions des variations mensuelles de prix depuis 1997

Actions



Obligations

(5 fois les variations mensuelles de taux)



Risque de taux vs risque actions

Comparaison des performances pour un investisseur sur un horizon de 12 mois glissants :